VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Rozklady grafů při rozpisu střelecké soutěže

Graph decompositions and scheduling of a shooting competition

2013

Kateřina Volná

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student: **Kateřina Volná**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Rozklady grafů při rozpisu střelecké soutěže
Graph decopositions and scheduling of a shooting competition

Zásady pro vypracování:

Při plánování sportovních zápasů (rozpisu soutěže) je nutno vzít v potaz celou řadu faktorů.
Pro plánování amatérské soutěže ve střelbě, kdy na různých střeleckých drahách se utkají vždy dvojice střelců, je nutno uvážit například:
- počet účastníků soutěže
- omezení počtu střeleckých drah
- dostatečné, avšak nepříliš dlouhé přestávky mezi jednotlivými koly pro každého hráče
- pravidelné střídání drah a na každé dráze pozice vlevo či vpravo

Při sestavení rozpisu lze s výhodou využít teorie grafů, zejména rozklady a barvení kompletních grafů.

Práci lze rozdělit do následujících částí:
- rozbor podmínek soutěže a požadavků pořadatelů
- formulace praktické úlohy v jazyce teorie grafů
- hledání rozpisů pro vybrané různé počty hráčů
- interpretace výsledků v kontextu původní úlohy
- sestavení rozpisů

Výsledkem této prakticky zaměřené práce jsou konkrétní rozpisy pro pevně zvolené počty účastníků soutěže a teoretický rozbor použitých metod.

Při řešení se bude vycházet z formulace reálné úlohy související s konkrétní amatérskou střeleckou soutěží.

Seznam doporučené odborné literatury:

- D.B.West: Introduction to graph theory, Upper Saddle River NJ, (2001), ISBN 0-13-014400-2.
- K.H.Rosen: Discrete Mathematics and Its Applications, New York NY, (2007), ISBN-10 0-07-288008-2.
- P. Kovář: Teorie grafů [online]. (2011), [cit. 2012-01-09]. <http://homel.vsb.cz/~kov16/predmety_tg.php>.
- dále odborné články dle pokynů vedoucího.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Tereza Kovářová, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013

Bouchala

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
fakulta elektrotechniky a informatiky
1

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a že veškeré podklady, z nichž jsem čerpala, jsou řádně citovány a uvedeny v seznamu literatury.

V Ostravě dne 7. května 2013 ....Volna.........

Ráda bych poděkovala své vedoucí bakalářské práce Mgr. Tereze Kovářové, Ph.D za její odborné rady a čas, který mi věnovala při řešení daného problému.

Abstrakt

Tato bakalářská práce vychází z reálného problému tvorby rozpisu zápasů sportovní střelecké soutěže pořádané formou turnaje. K tvorbě rozpisu jsou využity metody teorie grafů používané při losování sportovních soutěží jako rozklady kompletních grafů, faktorizace, kanonický rozklad a dobré hranové barvení, v závislosti na počtu přihlášených hráčů. Dále využíváme jeden ze základních kombinatorických designů, jímž jsou latinské čtverce. V práci je reálný problém převeden do teoretické roviny a jsou zde uvedeny postupy pro tvorbu rozpisu turnaje. Postupy tvorby rozpisu jsou zobecněny pro některé nekonečné počty hráčů.

Klíčová slova: graf, rozklad grafu, faktorizace, kanonická faktorizace, latinský čtverec, turnaj, losování sportovní soutěže

Abstract

This bachelor's thesis is based on a problem of constructing a schedule for the real sports shooting competition. In this competition every two players play one game against each other - it is a tournament. To find on optimal schedule known graph theory methods as decomposition of complete graphs, factorization, canonical factorization, proper edge coloring are used in dependancy on the number of registered players. We also use one of the basic combinatorial designs which are latin squares. In this thesis the real problem is converted into a theoretical level and procedures for constructions of schedules are described. Procedures are generalized for some certain infinity classes of registered players.

Keywords: graph, decomposition of graph, factorization, canonical factorization, latin square, tournament, sports competitions draw

Seznam použitých zkratek a symbolů

$G(V, E)$ - graf G s množinou vrcholů V a množinou hran E

K_n - kompletní graf na n vrcholech

$deg(v)$ - stupeň vrcholu v

F - faktor grafu

L_n - latinský čtverec řádu n

$(\mathbb{Z}_n, +)$ - konečná grupa zbytkových tříd modulo n

$\mathbb{N}$ - množina přirozených čísel

Obsah

Seznam obrázků

1 Úvod

Problém losování sportovních soutěží přitahuje pozornost multidisciplinárních výzkumníků po více než 40 let. První články pocházejí z konce 70. let. Ve většině článků jsou k řešení problémů spojených s plánováním sportovních soutěží využívány nástroje a metody diskrétní matematiky, především teorie grafů. Teorie grafů je matematická disciplína, která zkoumá vlastnosti struktur zvaných grafy. První úloha, která se zapsala do historie teorie grafů, byla sedm mostů města Královce. Otázkou bylo, zda je možné projít každým mostem ve městě právě jednou a vrátit se zpět do původního místa. Úspěšným řešitelem byl Leonhard Euler, který v roce 1736 matematicky dokázal, že to možné není.

Tématem této práce je tvorba rozpisu zápasů turnaje pro reálnou amatérskou střeleckou soutěž [9]. Abychom byli schopni takový rozpis vytvořit, využijeme některé nástroje teorie grafů, a to především rozklady kompletních grafů na 1-faktory a kanonický rozklad. Pomocí těchto nástrojů teorie grafů se pokusíme řešit problém tvorby rozpisu střelecké soutěže, kdy se na začátku přihlásí určitý počet účastníků a naším úkolem je vytvořit rozpis zápasů. Rozpis zápasů by měl být takový, aby měli všichni hráči pokud možno rovnocenné podmínky vzhledem k férovosti turnaje.

Pro přesnější formulaci zavedeme kapitolu 2, ve které bude podrobněji rozebráno zadání problému bakalářské práce. Budou zde uvedeny všechny požadavky, které máme účastníkům soutěže zajistit, rozebereme všechny faktory ovlivňující spravedlnost rozpisu soutěže. V kapitole třetí zavedeme pojmy a definice z teorie grafů, které jsou základem pro naši další práci. Kapitola 4 je zaměřena na tvoření rozpisů pomocí kanonického rozkladu kompletních grafů. Současně zavádíme problematiku rozmístění zápasů doma “Home” a venku “Away” a konstrukce souvisejících “Home - Away” tabulek s co nejmenším počtem brejků. Postup je zde rozlišen pro lichý a pro sudý počet hráčů. V kapitole 6 ukážeme na konkrétních příkladech způsoby sestavení rozpisů pro specifické hodnoty počtu přihlášených hráčů N, abychom poukázali na pokud možno všechny aspekty problému sestavení losování. V závěru kapitoly ukážeme možné zobecnění těchto postupů losování i pro nekonečné třídy N - počtu přihlášených hráčů.

Nejdříve jsme čerpali ze zdrojů [5],[8],[10],[11], kde se k losování turnaje sportovních soutěží využívají zejména metody a postupy teorie grafů. S využitím těchto metod jsme začali řešit problém tvoření rozpisu turnaje naší konkrétní střelecké soutěže. Brzy jsme však zjistili, že rozklad grafů na 1-faktory a kanonické losování nám nebudou zcela postačovat k tomu, abychom splnili všechny požadavky na férovost turnaje, a proto jsme hledali další nástroje a zvolili jsme zdroje [1],[2] z oblasti diskrétní matematiky nazývané kombinatorické designy. Tato disciplína úzce souvisí s teorií grafů, především pokud jde o rozklady grafů. Za jeden z nejjednodušších základních kombinatorických designů lze pokládat latinský čtverec, který se ukázal být vhodným nástrojem pro zdokonalení losování střelecké soutěže. V kapitole 5 proto zavedeme pojem latinských čtverců a k nim příslušné vlastnosti, které později využijeme v kapitole 6 při sestavování rozpisů turnajů. Latinské čtverce nám sice umožní vytvořit téměř dokonalý rozpis vzhledem k férovosti turnaje

- budeme mu říkat rozpis harmonický, ale ne pro všechny hodnoty N přihlášených hráčů.

Naším cílem však není vytvořit rozpis pro všechny možné počty hráčů. Zaměříme se především na počty kolem 15 až 40 hráčů, protože to jsou počty hráčů, kteří se do soutěže reálně hlásí. Řekneme, pro které počty hráčů jsme schopni zajistit všechny požadavky a kdy naopak neumíme vytvořit zcela harmonický rozpis turnaje pomocí užitých nástrojů.

2 Formulace problému

Bakalářská práce je zaměřena na použití postupů teorie grafů a diskrétní matematiky k losování sportovních soutěží. Vycházíme z reálné úlohy, která je inspirována sportovní střeleckou soutěží [9]. Soutěž se pořádá způsobem, že každý účastník se utká ve střeleckém souboji se všemi ostatními účastníky, tedy systémem každý s každým. Takto uspořádané soutěži říkáme turnaj. Jde o nejspravedlivější uspořádání soutěže, neboť každá dvojice účastníků může během turnaje změřit své síly. V našem případě se jedná o turnaj ve střelbě na terč.

Na začátku soutěže se přihlásí N soutěžících a je žádoucí, aby jim byly zajištěny co možná nejrovnocennější podmínky. Soutěž probíhá na několika střelnicích, kde se vždy na střeleckých dráhách jedné střelnice utkává jedna dvojice střelců. K dispozici v této konkrétní soutěži jsou dvě, tři nebo čtyři střelnice, v závislosti na technických okolnostech. Ideální by bylo, aby se každý hráč během turnaje prostřídal na všech střelnicích. Nebylo by totiž spravedlivé, aby jeden z hráčů hrál všechny své zápasy pouze na jedné střelnici, na které se mu např. nejvíc daří. Ostatní hráči by to mohli považovat za nevyrovnané soutěžní podmínky.

Turnaj sestává z jednotlivých zápasů, jejichž počet se odvíjí od počtu přihlášených účastníků. Než turnaj začne, je potřeba naplánovat v jakém pořadí budou zápasy odehrány, aby byl turnaj odehrán v co nejkratším čase. Během turnaje je žádoucí, aby se účastníci střídali na pozicích vlevo a vpravo. Jestliže např. hráč č. 1 hraje svůj první zápas vlevo, pak by měl druhý zápas hrát vpravo. Nebylo by spravedlivé, aby některý z hráčů odehrál všechny své zápasy na pravé (resp. levé) straně střelnice. Jestliže by na některého z hráčů vyšlo v rozlosování, aby ve všech soubojích střílel vpravo (resp. vlevo), mohl by si tento hráč připadat oproti ostatním hráčům znevýhodněn. Naopak pro jiného hráče by takové rozlosování mohlo být výhodné, za předpokladu, že se mu obzvláště daří jen vpravo (resp. vlevo).

Rovněž není žádoucí, aby jeden hráč odehrál všechny své zápasy na začátku soutěže a po zbytek soutěže jen čekal. Snažíme se tedy o to, aby měl každý hráč mezi svými zápasy rovnoměrné časové rozestupy (pauzy). Např. aby první zápas odehrál na začátku soutěže, druhý zápas uprostřed soutěže a poslední zápas na konci soutěže.

Není triviální navrhnout takový rozpis soutěže, aby byly podmínky rovnocenné pro každého účastníka. Požadavky pro zajištění rovnocenných podmínek soutěžících jsou např. spravedlivé střídání hráčů na střelnicích, jelikož máme omezený počet střelnic, nebo spravedlivé střídání pozic na jednotlivých střeleckých dráhách, čímž máme na mysli střídání na levé a pravé straně střelnice. Dalším problémem bude rozdělit jednotlivým hráčům zápasy tak, aby jeden kterýkoliv hráč neodehrál všechny své zápasy těsně za sebou, ale aby byly dodržovány přibližně stejné časové rozestupy.

Rozpisu soutěže, který by ideálním způsobem zohlednil všechny výše uvedené požadavky, budeme říkat harmonický resp. harmonické losování soutěže.

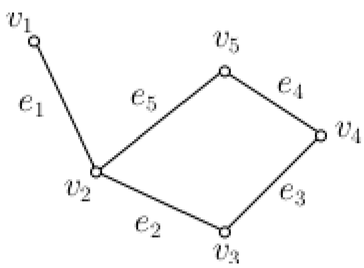
V teorii grafů existují známé postupy používané úspěšně při sestavování rozpisů soutěží takových, kde se každý hráč utká se všemi ostatními účastníky - turnajů. Pokusíme se použít známé postupy, případně vymyslet nové k tomu, abychom sestavili rozpis, který by se co nejvíce přiblížil rozpisu harmonickému.

3 Definice základních grafových pojmů

Než budeme moci přistoupit k formulaci problému pomocí jazyka teorie grafů, potřebujeme uvést definice základních pojmů, o které se budeme opírat v dalším textu. Tyto definice jsou převážně převzaty ze skript Teorie grafů od Petra Kováře [5], nebo od D. de Werry [8].

Definice 3.1 *Jednoduchý graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina vrcholů a E je nějaká množina dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvkům množiny E říkáme hrany.*

Na obrázku 1 je jednoduchý graf G s množinou vrcholů $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ a množinou hran $E =\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, kde $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5\}$, $e_5 = \{v_2, v_5\}$.



Obrázek 1: Nakreslení grafu G

Hrany označujeme obvykle písmeny z první poloviny abecedy $e, f, h, ...$ a vrcholy písmeny z konce abecedy u, v, w, z. Má-li hrana e koncové vrcholy u, v, používá se také zápis $e = uv$, nebo i stručněji hrana uv. V textu budeme pracovat s grafy jednoduchými, případně orientovanými, které neobsahují smyčky ani vícenásobné hrany.

Definice 3.2 *Je-li vrchol v koncovým vrcholem hrany e, můžeme psát $v \in e$ a říkáme, že vrchol v je incidentní s hranou e.*

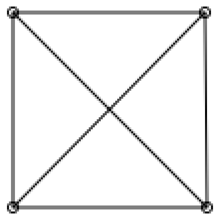
Například v grafu G na obrázku 1 je vrchol v_1 incidentní s hranou e_1. S jedním vrcholem může být incidentní větší počet hran, např. vrchol v_3 je incidentní s hranami e_2, e_3. S tím souvisí následující definice.

Definice 3.3 *Stupeň vrcholu v je počet hran, se kterými je vrchol v incidentní, a značí se $deg(v)$.*

Mezi jednoduchými grafy rozlišujeme některé speciální třídy grafů. Pro naši další práci je nejdůležitější třída kompletních grafů.

Definice 3.4 *Graf na n vrcholech, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ možných hran, se nazývá kompletní graf a značí se K_n.*

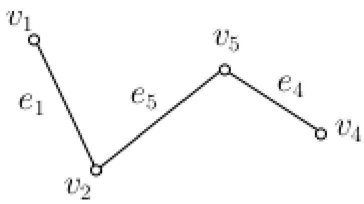
Příklad kompletního grafu na čtyřech vrcholech je na obrázku 2. Kompletní graf je graf s maximálním počtem hran na daném počtu vrcholů, každý vrchol je incidentní s $n-1$ hranami a celkem kompletní graf obsahuje $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ hran.



Obrázek 2: Kompletní graf K_4

Definice 3.5 *Mějme dán graf $G = (V, E)$. Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je podgrafem grafu G, jestliže $V' \subseteq V$ a současně $E' \subseteq E$.*

Příklad podgrafu grafu G je na obrázku 3. Z obrázku je patrné, že podgraf grafu G vznikl odstraněním hran e_2, e_3 a vrcholu v_3 z grafu G.

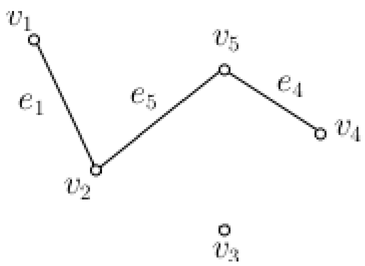


Obrázek 3: Podgraf grafu G

Speciálním případem je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu.

Definice 3.6 *Faktor grafu G je takový jeho podgraf $F = (V', E')$, který obsahuje všechny jeho vrcholy (tj. $V' = V$) a zároveň množina hran faktoru je podmnožinou množiny hran grafu G (tj. $E' \subseteq E$).*

Příklad faktoru grafu G je na obrázku 4.



Obrázek 4: Faktor grafu G

Poznámka 3.7 *Faktoru, ve kterém jsou všechny vrcholy stupně jedna, říkáme 1-faktor. Např. graf G nemá 1-faktor, protože obsahuje lichý počet vrcholů, oproti tomu graf K_4 se sudým počtem vrcholů má 1-faktor, který je dvojicí kompletních grafů K_2.*

Turnaj se skládá z řady zápasů, ale všechny zápasy nemohou probíhat současně. Proto je nutné rozdělit turnaj do jednotlivých kol, k čemuž lze využít hranové rozklady grafů na 1-faktory, pokud existují.

Definice 3.8 *Rozklad grafu G je takový systém faktorů $F_1, ..., F_k$, kde každé dva faktory jsou hranově disjunktní a sjednocením všech faktorů dostaneme právě graf G. Jestliže jsou navíc všechny faktory izomorfní $F_1 \simeq F_2 \simeq ... \simeq F_k \simeq H$, pak hovoříme o H-faktorizaci grafu G.*

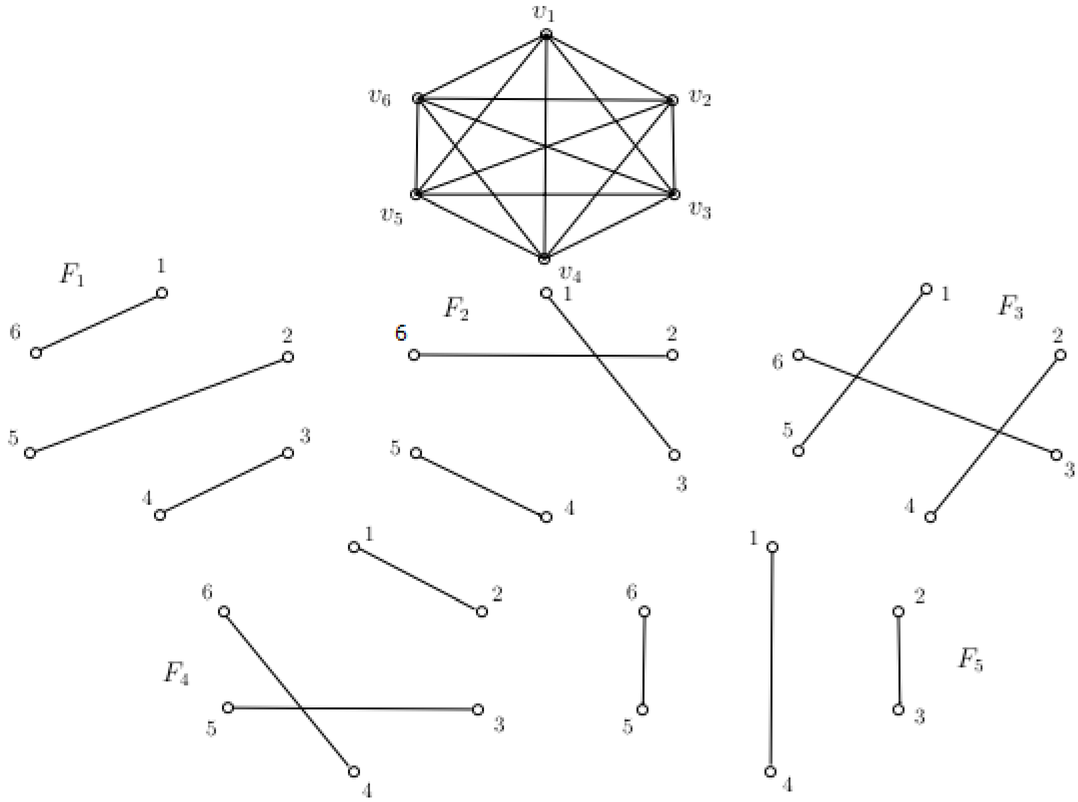
Poznámka 3.9 *Speciálním případem je 1-faktorizace grafu G, kdy graf G rozložíme na 1-faktory. Tj. v každém faktoru jsou všechny vrcholy stupně právě jedna. Na obrázku 5 je znázorněna 1-faktorizace grafu K_6 na 1-faktory $F_1, F_2, ..., F_5$.*

V článcích o losování sportovních soutěží se také používá pojem barvení grafu, proto zde uvedeme následující definici.

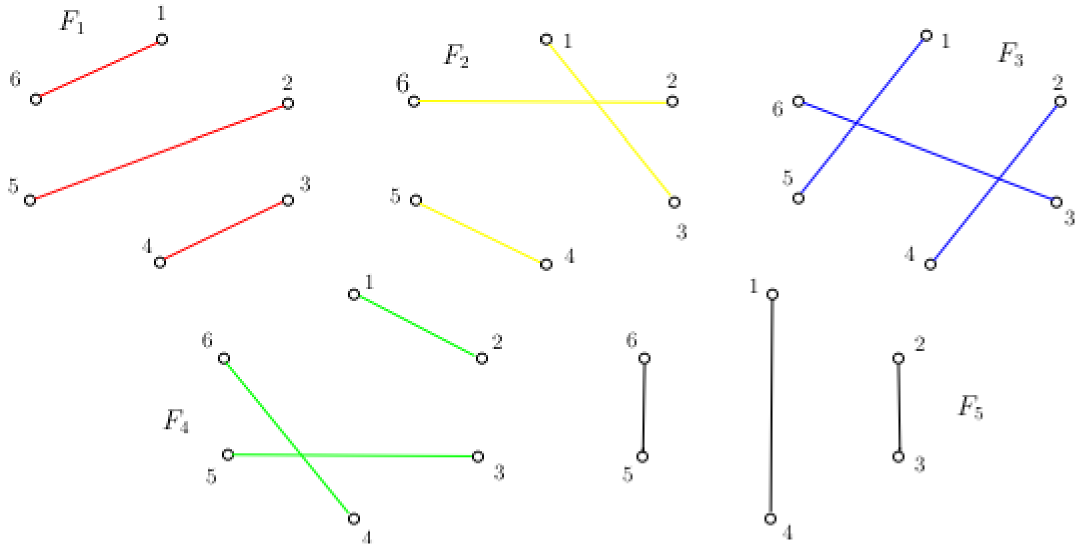
Definice 3.10 *Hranové barvení grafu G je zobrazení c hranové množiny $E(G)$ do množiny barev B, tj. $c : E(G) \to B$. Obvykle je $B = \{1, 2, ..., k\}$. Je-li $|B| = k$, zobrazení c se nazývá hranové k-barvení grafu G. Řekneme, že hrana e je obarvena barvou i jestliže $c(e) = i$. Číslu i říkáme barva hrany. Hranové barvení se nazývá dobré, jestliže žádné dvě hrany incidentní s jedním vrcholem nejsou obarveny stejnou barvou.*

Poznámka 3.11 *Označíme-li $B = \{F_1, F_2, ..., F_5\}$, pak F_i můžeme chápat jako označení barvy a současně faktoru jehož hrany jsou obarveny barvou F_i.*

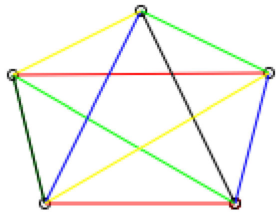
Jestliže $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ je 1-faktorizace grafu K_{2n}, pak zřejmě $c : E(K_{2n}) \to B$, kde $B = \{F_1, F_2, ..., F_{n-1}\}$ je dobré hranové barvení K_{2n}. Z toho plyne, že 1-faktorizace grafu K_{2n} je dobrým hranovým barvením grafu K_{2n}. Naproti tomu graf K_{2n-1}, tj. s lichým počtem vrcholů, může sice mít dobré hranové barvení ale toto barvení neodpovídá rozkladu na 1-faktory. Příklad dobrého hranového barvení kompletního grafu K_6 5 barvami rozloženého na 1- faktory $F_1, F_2, ..., F_5$ je na obrázku 6. Kompletní graf K_5 nemá 1-faktorizaci, avšak má dobré hranové barvení, viz obrázek 7.



Obrázek 5: 1-faktorizace kompletního grafu K_6



Obrázek 6: Dobré hranové barvení kompletního grafu K_6



Obrázek 7: Dobré hranové barvení kompletního grafu K_5

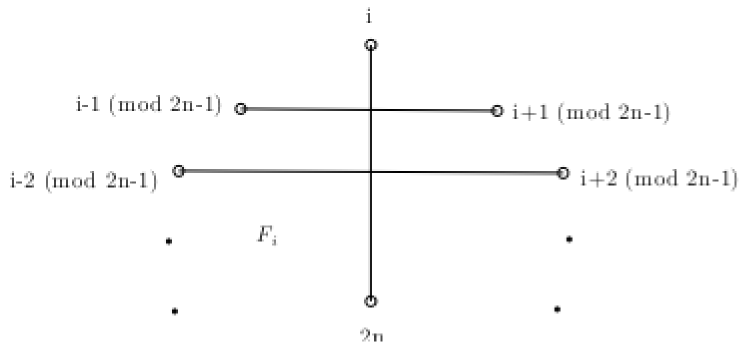
4 Turnaje v teorii grafů

Sportovní soutěž pořádanou formou turnaje můžeme modelovat pomocí kompletního grafu. V našem konkrétním případě se zabýváme střeleckým turnajem. Vrcholy kompletního grafu reprezentují jednotlivé hráče a hrany kompletního grafu představují jednotlivé zápasy mezi dvěma hráči. Nelze však odehrát všechny zápasy současně. Uvážíme-li turnaj pro $2n$ hráčů, v jednu chvíli může probíhat nejvíce $2n/2$ zápasů současně. Této fázi říkáme *kolo* turnaje. V ideálním případě může být turnaj odehrán v $2n-1$ kolech, protože žádný hráč v žádném kole neodpočívá. Takovému losování, kdy se každého kola účastní všichni hráči, říkáme *kompaktní*. Jestliže kompletní graf rozložíme na 1-faktory, pak nám každý 1-faktor reprezentuje jedno kolo turnaje. Jsou známy postupy jak rozložit kompletní graf na hranově disjunktní 1-faktory. My využijeme kanonickou faktorizaci.

4.1 Kanonické losování pro sudý počet hráčů

Uvedeme si nejznámější z postupů, jak rozdělit zápasy turnaje pro sudý počet hráčů do jednotlivých kol.

Definice 4.1.1 [8] *Označme* F_1,F_2,.....,F_{2n-1} *1-faktory kompletního grafu* K_{2n}. *Faktorizace se nazývá kanonickou, jestliže* $F_i = \{\{2n, i\}\} \cup \{\{i+k, i-k\};\ k = 1, 2, ..., n-1,$
$i = 1, ..., 2n-1\}$, *kde čísla* $i+k$ *a* $i-k$ *jsou vyjádřena jedním z čísel* $1, 2, ..., 2n-1$ $(\text{mod } 2n-1)$.

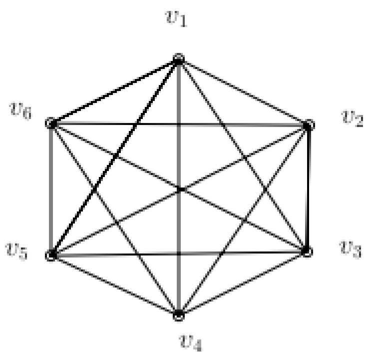


Obrázek 8: Faktor F_i kompletního grafu K_{2n}

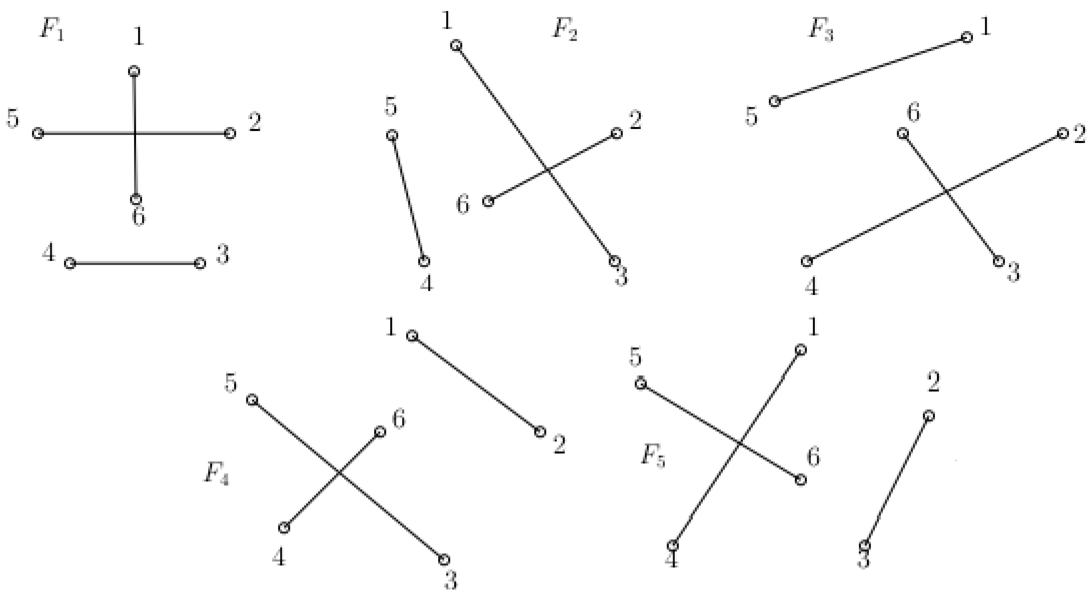
Každá hrana grafu představuje jeden zápas mezi dvěma hráči. Faktor F_i obsahuje hrany znázorňující všechny zápasy hrané v i - tém kole turnaje, viz obrázek 8.

Rozdělení zápasů do jednotlivých kol pomocí kanonické faktorizace ukážeme na příkladu. Budeme uvažovat hokejový turnaj, kterého se zúčastní 6 týmů. Turnaj pro 6 týmů je modelován kompletním grafem na 6 vrcholech, viz obrázek 9.

Začneme sestrojením kanonického rozkladu kompletního grafu K_6 na 1-faktory $F_1, ..., F_5$, viz obrázek 10.



Obrázek 9: Kompletní graf K_6



Obrázek 10: Kanonický rozklad kompletního grafu K_6

Tabulka kanonického losování pro 6 týmů je na obrázku 11.

Součástí rozpisu turnaje je také rozhodnout, kde se bude zápas odehrávat. Hraje-li tým A ve svém městě a tým B na utkání přicestoval, říká se, že tým A hraje doma a tým B hraje venku. Dá se totiž předpokládat, že tým, který bude hrát doma, bude ve výhodě oproti druhému týmu. K určování, zda bude pro daný tým probíhat zápas doma nebo venku, zavedeme orientaci hran. Představuje-li hrana $\{i, j\}$ zápas mezi týmy i a j, bude orientovaná hrana $(i, j) = \overrightarrow{ij}$ představovat zápas, který se odehrává pro tým i venku a pro tým j doma. Zavedeme zde i anglické pojmy Home a Away, jelikož české výrazy “Doma” a “Venku” nejsou tak ustálené. Jestliže hraje doma tým j, pak se jedná o zápas “Home” pro tým j a o zápas “Away” pro tým i.

	0	1	2
F_1	61	25	34
F_2	62	31	45
F_3	63	42	51
F_4	64	53	12
F_5	65	14	23

Obrázek 11: Kanonické losování pro 6 týmů

Nejprve si sestavíme tabulku kanonického losování pro 6 týmů, ve které jsme nějak zvolili orientaci hran (viz obrázek 12).

i,k	0	1	2
F_1	$\overrightarrow{61}$	$\overrightarrow{25}$	$\overrightarrow{34}$
F_2	$\overleftarrow{62}$	$\overleftarrow{31}$	$\overleftarrow{45}$
F_3	$\overrightarrow{63}$	$\overrightarrow{42}$	$\overrightarrow{51}$
F_4	$\overleftarrow{64}$	$\overleftarrow{53}$	$\overleftarrow{12}$
F_5	$\overrightarrow{65}$	$\overrightarrow{14}$	$\overrightarrow{23}$

Obrázek 12: Kanonické losování pro 6 týmů se zvolenou orientací hran

K tabulce na obrázku 12 můžeme připojit další tabulku na obrázku 13, ze které je lépe vidět, kde který tým hraje. V tabulce budeme pojmy “Home” a “Away” značit pouze H a A. Např. jestliže tým 1 hraje v prvním kole doma, do tabulky umístíme symbol H. Ve sloupcích tabulky jsou jednotlivé faktory, které nám představují kola turnaje a každý řádek tabulky představuje umístění zápasů pro odpovídající tým. Tabulka rozmístění zápasů se anglicky nazývá “Home-Away-Pattern”. Nadále budeme používat i zkrácené označení HAP.

tým,kolo	1	2	3	4	5
1	H	A	H	$\underline{H}$	A
2	A	$\underline{A}$	H	A	$\underline{A}$
3	A	H	$\underline{H}$	A	H
4	H	$\underline{H}$	A	$\underline{A}$	H
5	H	A	$\underline{A}$	H	$\underline{H}$
6	A	H	A	H	A

Obrázek 13: Tabulka HAP

V daném kole má daný tým brejk, jestliže hraje doma (resp. venku) a v předchozím kole hrál také doma (resp. venku). Počet brejků daného losování tedy určíme podle rozmístění zápasů turnaje. Např. tým 2 hraje v prvním a ve druhém kole venku, tzn. tento tým má brejk ve druhém kole (viz obrázek 13). V tabulce na obrázku 13 jsou brejky znázorněny podtržením, přičemž je hned patrné, že naše losování má celkem 8 brejků. Jak ale vidíme, jednotlivé týmy mají různý počet brejků a otázka je, zda by nebylo možno dosáhnout menšího počtu brejků.

Cílem je to, aby se všem týmům střídaly zápasy doma a venku co nejvíce a aby všechny týmy měly pokud možno stejný počet brejků.

V předchozím případě se nám nepovedlo zajistit, aby se zápasy doma a venku každému týmu pravidelně střídaly. Abychom sestavili losování, které má co nejméně brejků, použijeme orientaci hran z důkazu následující věty z článku [8].

Věta 4.1.2 [8] *Pro kompaktní losování K_{2n} existuje nejméně $2n-2$ brejků.*

1. pro každé i se hrana $\{2n, i\}$ orientuje jako $(i, 2n)$, jestliže i je liché nebo jako $(2n, i)$, jestliže i je sudé
2. pro každé i se hrana $\{i+k, i-k\}$ orientuje jako $(i+k, i-k)$, jestliže k je liché nebo jako $(i-k, i+k)$, jestliže k je sudé

Tabulka kanonického losování pro 6 týmů s určenou orientací hran a související HAP jsou na obrázku 14.

i,k	0	1	2
F_1	$\overleftarrow{61}$	$\overrightarrow{25}$	$\overleftarrow{34}$
F_2	$\overrightarrow{62}$	$\overrightarrow{31}$	$\overleftarrow{45}$
F_3	$\overleftarrow{63}$	$\overrightarrow{42}$	$\overleftarrow{51}$
F_4	$\overrightarrow{64}$	$\overrightarrow{53}$	$\overleftarrow{12}$
F_5	$\overleftarrow{65}$	$\overrightarrow{14}$	$\overleftarrow{23}$

tým,kolo	1	2	3	4	5
1	A	H	A	H	A
2	A	H	$\underline{H}$	A	H
3	H	A	$\underline{A}$	H	A
4	A	H	A	H	$\underline{H}$
5	H	A	H	A	$\underline{A}$
6	H	A	H	A	H

Obrázek 14: Kanonické losování pro 6 týmů a tabulka HAP

Kompaktní losování má vlastnost komplementarity. Tzn. brejky se vždy vyskytují v páru. Jestliže má jeden tým "A" v kolech k a $k+1$, pak musí existovat druhý tým, který má "H" v kolech k a $k+1$. V tabulce HAP na obrázku 14 jsou pouze 4 brejky, tj. docílili jsme tak nejmenšího možného počtu $2n-2$ brejků. Navíc můžeme v tabulce HAP vidět, že komplementem pro střídání doma a venku např. týmu 2 je střídání doma a venku týmu 3.

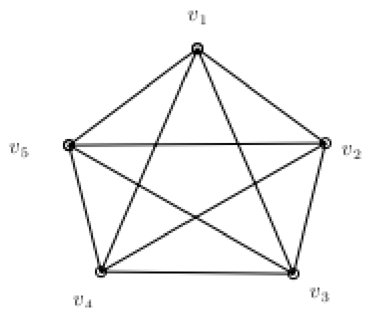
4.2 Kanonické losování pro lichý počet hráčů

Ukážeme si, jak vypadá kanonické losování, jestliže se do turnaje přihlásí lichý počet účastníků. Pro lichý počet hráčů nelze sestavit zcela kompaktní losování ani neexistuje 1-faktorizace odpovídající kompletnímu grafu na lichém počtu vrcholů, protože v každém kole musí alespoň 1 hráč odpočívat. Losování pro $2n-1$ hráčů lze sestavit podle kanonického losování pro $2n$ hráčů následujícím způsobem. V každém 1-faktoru grafu K_{2n} bude jeden vrchol neobsazen a to tak, že v i -tém kole nebude hrát i -tý hráč.

Navíc pro lichý počet hráčů lze zajistit i ideální podmínky vzhledem ke střídání zápasů doma a venku.

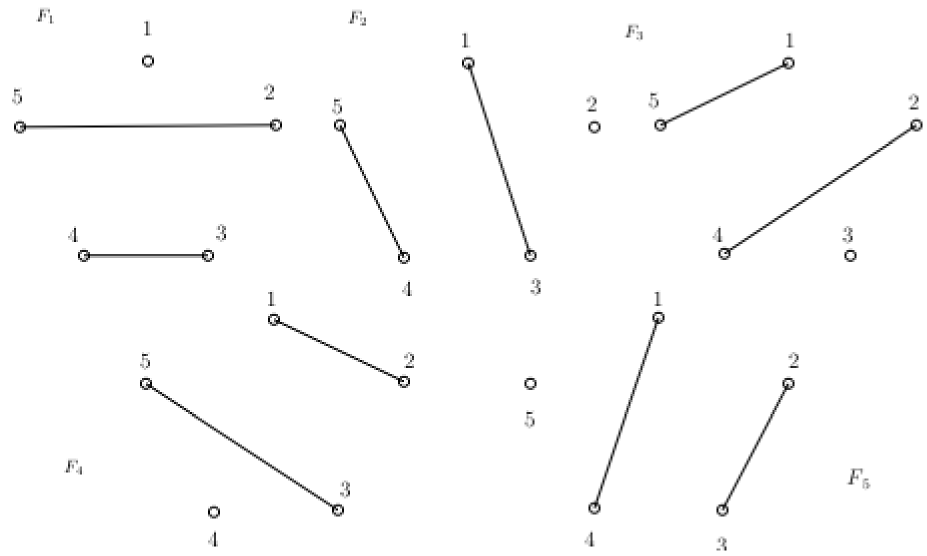
Věta 4.2.1 [8] *Pro K_{2n-1} existuje kompaktní losování do $2n-1$ kol bez brejků.*

Turnaj pro 5 hráčů modelujeme kompletním grafem na 5 vrcholech, viz obrázek 15.



Obrázek 15: Kompletní graf K_5

Podle kanonického rozkladu rozložíme graf K_5 na faktory $F_1, ..., F_5$, viz obrázek 16.



Obrázek 16: Faktorizace kompletního grafu K_5

Tabulka kanonického losování pro 5 hráčů, kdy v každém kole musí některý z hráčů odpočívat, je znázorněna na obrázku 17.

	0	1	2
F_1	1	25	34
F_2	2	31	45
F_3	3	42	51
F_4	4	53	12
F_5	5	14	23

Obrázek 17: Kanonické losování pro 5 hráčů

Tabulka kanonického losování pro 5 hráčů s určenou orientací hran je na obrázku 18 a související tabulka HAP je na obrázku 19.

i,k	0	1	2
F_1	1	$\overrightarrow{25}$	$\overleftarrow{34}$
F_2	2	$\overrightarrow{31}$	$\overleftarrow{45}$
F_3	3	$\overrightarrow{42}$	$\overleftarrow{51}$
F_4	4	$\overrightarrow{53}$	$\overleftarrow{12}$
F_5	5	$\overrightarrow{14}$	$\overleftarrow{23}$

Obrázek 18: Kanonické losování pro 5 hráčů s orientací hran

hráč,kolo	1	2	3	4	5
1	-	A	H	A	H
2	H	-	A	H	A
3	A	H	-	A	H
4	H	A	H	-	A
5	A	H	A	H	-

Obrázek 19: Tabulka HAP pro 5 hráčů

V našem případě rozlosování střelecké soutěže, můžeme využít HAP ke střídání střelců na pozicích jednotlivých střelnic, přičemž “Home” reprezentuje na střelnici pozici vlevo a “Away” představuje pozici vpravo. Tímto způsobem získáme ideální rozpis zápasů vzhledem k pozicím vlevo - vpravo.

Turnaj se odehrává na určitém počtu střelnic, a je žádoucí, aby se hráči spravedlivě prostřídali na jednotlivých střelnicích. Zápasy je nutné rozdělit na jednotlivé střelnice, k čemuž modely kanonického rozkladu a HAP nejsou dostatečné. Za nástroj vhodný k řešení tohoto problému jsme zvolili latinské čtverce.

5 Latinské čtverce

Pojem latinský čtverec zavedl Leonhard Euler roku 1782. Důvodem tohoto názvu bylo, že Euler používal jako symboly písmena latinky. Avšak prvky latinského čtverce mohou být různé objekty, např. hrací karty, šachové figurky, osoby či přirozená čísla. Proslulá úloha, která stála u zrodu latinských čtverců, byla úloha o 36 důstojnících. Dnes se latinské čtverce používají např. pro konstrukce samoopravných kódů nebo matematických hádanek (např. sudoku). My je využijeme k sestavování rozpisů turnaje.

Definice 5.1 [2] *Latinský čtverec L_n o straně n je $n \times n$ tabulka, která je vyplněna n různými symboly tak, že v každém řádku a v každém sloupci se každý symbol nachází právě jednou.*

Pro $n = 2, 3, 4$ jsou příklady latinských čtverců na obrázku 20.

2	1
1	2

♡	♣	□
♣	□	♡
□	♡	♣

1	4	2	3
2	3	1	4
4	1	3	2
3	2	4	1

Obrázek 20: Příklady latinských čtverců

5.1 Konstrukce

Existují různé způsoby konstrukcí latinských čtverců [4]. Sestavení tabulky operace sčítání, nebo odčítání pro celá čísla modulo n a sestavení tabulky operace násobení pro prvočísla modulo n jsou způsoby, jak vytvořit latinský čtverec. Obecně platí, že sestavením tabulky operace pro konečnou grupu nebo kvazigrupu vznikne latinský čtverec. Latinský čtverec L_n řádu n existuje pro každé přirozené číslo n a obsahuje právě n^2 buněk [2]. Např. pro $n = 5$ bude existovat latinský čtverec L_5 řádu 5 a bude obsahovat 5^2 buněk.

Pro naše potřeby vystačíme s konstrukcí latinských čtverců sestavením tabulky operace sčítání přirozených čísel modulo n.

Definice 5.1.1 [7] *Jestliže dvě celá čísla a, b dávají při dělení přirozeným číslem n týž zbytek r, kde $0 \leq r < n$, říkáme, že a je kongruentní s b modulo n, což zapisujeme takto: $a \equiv b \pmod{n}$.*

Budeme-li tedy sčítat celá čísla např. modulo 5, pak $2+6 \equiv 3 \pmod{5}$, $1+4 \equiv 0 \pmod{5}$ nebo $11 + 20 \equiv 1 \pmod{5}$.
Na levé i pravé straně kongruence jsou čísla, která dávají stejný zbytek po dělení modulem. Při počítání modulo 5 jsou možné zbytky $0, 1, 2, 3$ a 4. Podle těchto zbytků mohou být všechna celá čísla rozdělena do 5 zbytkových tříd. Třídy jsou $C_0 = \{... - 10, -5, 0, 5, 10...\}$, $C_1 = \{... - 9, -4, 1, 6, 11...\}$, $C_2 = \{... - 8, -3, 2, 7, 12...\}$, $C_3 = \{... - 7, -2, 3, 8, 13...\}$,

$C_4 = \{... -6\ ,\ -1,\ 4\ ,9\ ,14\ ...\}$.
Pro každou třídu můžeme zvolit reprezentanta a konvenčně volíme $C_0 \sim 5$, $C_1 \sim 1$, $C_2 \sim 2$, $C_3 \sim 3$ a $C_4 \sim 4$. Je známo, že množina zbytkových tříd s operací sčítání modulo 5 tvoří grupu a značí se $(\mathbb{Z}_5, +)$. Definici grupy zde nebudeme uvádět a odkážeme se na [6]. Nadále budeme přirozeně využívat vlastností této algebraické struktury. Např. tabulky operací $(\mathbb{Z}_5, +)$ a $(\mathbb{Z}_6, +)$ jsou na obrázku 21. Místo zbytkových tříd v tabulkách počítáme s jejich reprezentanty.

Poznámka 5.1.2 *Budeme-li pracovat s konečnou grupou zbytkových tříd modulo n, použijeme značení* $(\mathbb{Z}_n, +)$.

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	1
2	3	4	5	6	1	2
3	4	5	6	1	2	3
4	5	6	1	2	3	4
5	6	1	2	3	4	5
6	1	2	3	4	5	6

Obrázek 21: Tabulky operace sčítání pro $(\mathbb{Z}_5,+)$ a $(\mathbb{Z}_6,+)$

Věta 5.1.3 *Tabulka operace grupy* $(\mathbb{Z}_n, +)$ *je latinským čtvercem, který budeme značit* L_+.

Důkaz:
Nechť $L_+(i, j)$ pro $i, j = 1, 2, ..., n$ je tabulka operace sčítání modulo n. Ukážeme, že tato tabulka je latinským čtvercem.

Pro řádky:
V řádku latinského čtverce se musí každý symbol vyskytovat právě jednou. Porovnáme symboly $L_+(i, j)$ a $L_+(i, k)$ z řádku tabulky na dvou libovolných různých pozicích, tj. $j \neq k$. Budeme postupovat sporem.

Předpokládáme, že symboly na různých pozicích v řádku jsou stejné: $L_+(i, j) = L_+(i, k)$. Odtud plyne následující vztah.

$$i + j \;=\; i + k,$$

kde předchozí rovnost platí v grupě $(\mathbb{Z}_n, +)$, tj.

$$i + j \;\equiv\; i + k \pmod{n} \qquad / - i.$$

Od každé strany kongruence odečteme i, pak

$$j \;\equiv\; k \pmod{n}.$$

Protože $1 \leq j$, k $\leq$ n musí být $j = k$. Ale to je spor s předpokladem, že $j \neq k$. Žádný symbol se v řádku tedy neopakuje.

Pro sloupce:
Postup je obdobný jako u důkazu pro řádky. Ve sloupci latinského čtverce se každý symbol vyskytuje právě jednou. Porovnáváme symboly $L(i,j)$ a $L(k,j)$ ze sloupce tabulky na různých pozicích. Budeme postupovat sporem.

Předpokládáme, že symboly na dvou libovolných různých pozicích ve sloupci jsou stejné: $L(i,j) = L(k,j)$, pro $i \neq k$. Odtud dostáváme následující vztah.

$$i + j \;\; = \;\; k + j,$$

kde rovnost platí v grupě $(\mathbb{Z}_n, +)$, tj.

$$i + j \;\; \equiv \;\; k + j \pmod{n} \qquad / - j.$$

Od každé strany kongruence odečteme j, pak

$$i \;\; \equiv \;\; k \pmod{n}.$$

Protože $1 \leq i,\, k \leq n$ musí být $i = k$, což je spor s předpokladem, že $i \neq k$. Ani ve sloupci se žádný symbol neopakuje.

Ukázali jsme, že tabulka $L_+(i,j)$ je latinským čtvercem.

5.2 Izomorfismus

Definice 5.2.1 [2] *Nechť L a $\widehat{L}$ jsou latinské čtverce řádu n. Označme množinu řádkových indexů jako E_1, množinu sloupcových indexů jako E_2 a množiny symbolů jako E_3, $\widehat{E_3}$. Jestliže existují bijektivní zobrazení $\phi_1{:}E_1 \to E_1$, $\phi_2{:}E_2 \to E_2$, $\phi_3{:}E_3 \to \widehat{E_3}$, taková, že $\phi_3 L(i,j) {=} \widehat{L}(\phi_1(i), \phi_2(j))$ pro každé $i \in E_1$, $j \in E_2$ a $L(i,j) \in E_3$, pak latinské čtverce L a $\widehat{L}$ jsou izomorfní. Zapisujeme také $L \approx \widehat{L}$.*

$$L = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \to \qquad \widehat{L} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Obrázek 22: Izomorfní latinské čtverce řádu 3

Např. latinské čtverce L a $\widehat{L}$ na obrázku 22 jsou izomorfní. Izomorfismy jsou: $\phi_1{=}\phi_2{=}\mathrm{id}$, $\phi_3(2) = 1$, $\phi_3(1) = 3$, $\phi_3(3) = 2$. Izomorfismus ϕ_3 můžeme chápat jako permutaci na množině symbolů. Podle potřeby můžeme používat následující zápisy permutace:
$2 \to 1 \to 3 \to 2$, cyklický zápis (213), nebo maticový zápis

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.3 Transverzála v latinském čtverci

Definice 5.3.1 [2] *Transverzála v latinském čtverci řádu n je množina n buněk, vybraných právě jedna buňka z každého řádku a sloupce, obsahující každý z n symbolů právě jednou.*

Poznámka 5.3.2 [2]

- *Některé latinské čtverce nemají žádnou transverzálu.*
- *Disjunktní transverzály jsou takové transverzály, které neobsahují žádnou společnou buňku latinského čtverce.*
- *Jestliže má latinský čtverec L transverzálu, pak latinský čtverec izomorfní k L má také transverzálu.*
- *Každý latinský čtverec sudého řádu má sudý počet transverzál.*

Příklady transverzál jsou na obrázku 23.

2	$\underset{\cdot}{3}$	1
3	1	$\underset{\cdot}{2}$
$\underset{\cdot}{1}$	2	3

$\underset{\cdot}{2}$	3	4	5	1
3	4	5	$\underset{\cdot}{1}$	2
4	$\underset{\cdot}{5}$	1	2	3
5	1	2	3	$\underset{\cdot}{4}$
1	2	$\underset{\cdot}{3}$	4	5

Obrázek 23: Transverzály v latinském čtverci

Obecně není známá odpověď na otázku, kolik transverzál najdeme v latinském čtverci. Pro naše potřeby budeme chtít zajistit dostatečný počet vzájemně disjunktních transverzál v latinském čtverci. K tomu využijeme latinský čtverec, který je tabulkou operace sčítání pro grupu $(\mathbb{Z}_n, +)$, kde n je liché. Tento čtverec budeme značit L_+.

5.4 Ortogonální latinský čtverec

Leonhard Euler začal se studiem ortogonálních latinských čtverců v roce 1782, kdy řešil problém 36 důstojníků "The Euler Officer Problem" [1]. My využijeme ortogonální latinské čtverce k pozdějšímu důkazu o počtu transverzál latinského čtverce L_+.

Definice 5.4.1 [1] *Dva latinské čtverce L a $\widehat{L}$ řádu n jsou ortogonální, jestliže pro každé $(x,y) \in E_3 \times E_3$ existuje právě jedna dvojice indexů $(i,j) \in E_1 \times E_2$ taková, že buňka (i,j) latinského čtverce L obsahuje symbol x, $L(i,j) = x$ a buňka (i,j) latinského čtverce $\widehat{L}$ obsahuje symbol y, $\widehat{L}(i,j)=y$. Latinské čtverce $L_1, L_2, \dots, L_t$ jsou vzájemně ortogonální, jestliže pro $\forall a,b : 1 \leq a \neq b \leq t$, L_a a L_b jsou ortogonální.*

Na obrázku 24 jsou ortogonální latinské čtverce $L, \widehat{L}$ řádu 4 a tabulka obsahující všechny různé uspořádané dvojice symbolů, které vznikly přeložením ortogonálních čtverců přes sebe.

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \widehat{L} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 11 & 22 & 33 & 44 \\ \hline 43 & 34 & 21 & 12 \\ \hline 24 & 13 & 42 & 31 \\ \hline 32 & 41 & 14 & 23 \\ \hline \end{array}$$

Obrázek 24: Ortogonální latinské čtverce L, $\widehat{L}$ a tabulka uspořádaných dvojic symbolů

Poznámka 5.4.2 [1] *Jednoduchý způsob, jak ukázat, že dva latinské čtverce jsou ortogonální, je použití pravidla "The Two Finger Rule". Nechť L a M jsou latinské čtverce řádu n. Pak L a M jsou ortogonální právě tehdy, když každá dvojice buněk obsazena stejnými symboly v L je obsazena různými symboly v M.*

Ke každému latinskému čtverci lichého řádu L_+ umíme najít ortogonální čtverec. Způsob konstrukce tohoto čtverce je uveden v důkazu následující věty.

Věta 5.4.3 *V latinském čtverci L_+ lichého řádu je právě n disjunktních transverzál.*

Důkaz:
Na základě toho, že k latinskému čtverci L_+ existuje ortogonální čtverec, označme jej $L_\circ$, můžeme tvrdit, že v latinském čtverci L_+ je n disjunktních transverzál. Z definice plyne, že jestliže přes sebe přeložíme dva latinské čtverce, které jsou navzájem ortogonální, pak dostaneme všechny možné uspořádané dvojice symbolů. Každá dvojice symbolů se zde vyskytuje právě jednou. Uvážíme-li všechny pozice v $L_\circ$ se stejným symbolem, pak se na stejných pozicích v L_+ nachází všech n různých symbolů a tyto tvoří transverzálu, za předpokladu, že L_+ a $L_\circ$ jsou ortogonální. Protože v $L_\circ$ se střídá n různých symbolů, musí být v L_+ právě n disjunktních transverzál. Zbývá ukázat, že $L_\circ$ a L_+ jsou ortogonální. Pro přehlednost jsou na obrázku 24 znázorněny buňky se stejnými symboly v $L_\circ$ a jim odpovídající transverzály v L_+.

Vyjdeme z vlastností ortogonálních latinských čtverců a pravidla "The Two Finger Rule". Zkonstruujeme tabulku $L_\circ$, kde operaci kolečko definujeme takto: $i \circ j = i - j + 2 \pmod{n}$. Ukážeme, že $L_\circ$ je latinský čtverec. Důkaz je obdobný důkazu Věty 4.4.1.

Pro symboly v řádku:
Předpokládáme, že symboly na dvou libovolných různých pozicích v řádku jsou stejné: $L_\circ(i,j) = L_\circ(i,k)$, kde $j \neq k$. Odtud plyne následující vztah.

$$i - j + 2 \quad = \quad i - k + 2,$$

kde rovnost platí v rámci grupy $(\mathbb{Z}_n, +)$, tj.

$$i - j + 2 \quad \equiv \quad i - k + 2 \pmod{n} \qquad / - i, -2.$$

Od každé strany kongruence odečteme i a 2, pak

$$j \equiv k \pmod{n}.$$

Protože $1 \leq j,\ k \leq n$ musí být $j = k$. Ale to je spor s předpokladem, že $j \neq k$. Žádný symbol se tedy v řádku neopakuje.

Pro symboly ve sloupci je postup analogický.

Příklad latinských čtverců L_+ a $L_\circ$ řádu 5 je na obrázku 25.

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

∘	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	1	2	3	4	5
3	5	1	2	3	4
4	4	5	1	2	3
5	3	4	5	1	2

Obrázek 25: Latinské čtverce L_+ a $L_\circ$ řádu 5 s vyznačenou transverzálou v L_+

Dále ukážeme, že latinské čtverce L_+ a $L_\circ$ jsou ortogonální. Použijeme pravidlo "The Two Finger Rule". Budeme porovnávat dvě dvojice symbolů. Z latinského čtverce L_+ vybereme dvě různé buňky se stejným symbolem a porovnáme symboly v latinském čtverci $L_\circ$ ve stejných buňkách.

Pokud jsou symboly v latinském čtverci $L_\circ$ různé, pak jsou čtverce L_+ a $L_\circ$ ortogonální. Budeme postupovat sporem.

Nechť $L_+(i,j) = L_+(k,l)$, přičemž $i \neq k \wedge j \neq l$.
Odtud plyne následující vztah:

$$i + j \equiv k + l \pmod{n}. \tag{1}$$

Předpokládejme, že i $L_\circ(i,j) = L_\circ(k,l)$.
Tedy platí:

$$i \circ j = k \circ l,$$

tj.

$$\begin{aligned} i - j + 2 \pmod{n} &\equiv k - l + 2 \pmod{n} \qquad / - 2, \\ i - j &\equiv k - l \pmod{n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nyní můžeme kongruence (1) a (2) sečíst a dostaneme:

$$2i \equiv 2k \pmod{n},$$

kde pro n liché můžeme krátit 2, protože kongruenci můžeme krátit číslem nesoudělným s modulem, tj. $i \equiv k \pmod{n}$. Odtud $i = k$, což je spor s předpokladem, že pozice v latinském čtverci $L_\circ$ jsou různé.

Ukázali jsme, že latinské čtverce $L_\circ$ a L_+ jsou ortogonální a tedy L_+ obsahuje právě n disjunktních transverzál.

5.5 Idempotentní latinský čtverec

Vlastnosti idempotentních latinských čtverců využijeme později při vytváření rozpisu turnaje, přičemž zajistíme předpoklad, že v i-tém kole bude odpočívat i-tý hráč. Proto zde uvádíme následující definici.

Definice 5.5.1 *Latinský čtverec řádu n je idempotentní, jestliže platí $L(i,i) = i$ pro každé $i \in \{1, ..., n\}$.*

1	3	2
3	2	1
2	1	3

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

Obrázek 26: Idempotentní latinské čtverce

Latinský čtverec L_+, pro libovolné n, není obecně idempotentní.

Lemma 5.5.2 *Pro n liché, tj. $n = 2k-1$, kde $k \in \mathbb{N}$, existuje idempotentní latinský čtverec řádu n izomorfní s L_+.*

Důkaz:
Protože pro n liché má L_+ řádu n na hlavní diagonále všechny zbytky (všechny symboly čtverce), existuje vždy permutace symbolů, která přeuspořádá prvky diagonály tak, aby byl čtverec idempotentní. Příklad je uveden na obrázku 27.

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

	1	2	3	4	5
1	1	4	2	5	3
2	4	2	5	3	1
3	2	5	3	1	4
4	5	3	1	4	2
5	3	1	4	2	5

Obrázek 27: Idempotentní latinský čtverec vytvořený permutací symbolů L_+

Poznámka 5.5.3 *Pro n sudé, $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$, L_+ nemá na hlavní diagonále všechny zbytky a jednoduše z něj idempotentní latinský čtverec izomorfní s L_+ nezískáme. Idempotentní latinské čtverce sudých řádů existují ale nevíme, zda jsou izomorfní s L_+ řádu $n = 2k$* [2].

5.6 Idempotentní latinský čtverec a kanonický rozklad kompletního grafu

Dle latinského čtverce L_+ řádu $2n-1$ můžeme sestrojit rozklad kompletního grafu K_{2n} na 1-faktory F_1,F_2,...,F_{2n-1}. Jestliže uvážíme, že řádkové, resp. sloupcové indexy odpovídají vrcholům, pozice (i, j) latinského čtverce představuje orientovanou hranu $\overrightarrow{ij}$ grafu K_{2n} a symbol $L_+(i, j)= i+j \pmod{2n-1}$ představuje index faktoru k, kde $k = 1, 2, ..., 2n-1$.

Operace $+$ je komutativní, z čehož plyne, že čtverec je symetrický podle diagonály a tedy pozice (i, j) a (j, i) jsou vyplněny stejným symbolem. Tomu odpovídá, že obě orientované hrany $\overrightarrow{ij}$ i $\overrightarrow{ji}$ patří do stejného faktoru. Je zřejmé, že informaci o rozkladu vyčteme jen z poloviny čtverce pod (resp. nad) diagonálou. Které hrany tedy budou patřit faktoru F_k? Do faktoru F_k patří každá hrana (i, j) taková, že $L_+(i, j) = L_+(j, i) = k$, pro $i \neq j$ a dále hrana $(i, 2n)$ pro $L_+(i, i) = k$.

Rozklad si ukážeme na příkladu pro 6 hráčů a vyjdeme z latinského čtverce L_+ řádu 5, viz obrázek 28.

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\{5,1\}, \{4,2\}, \{3,6\}\} \\ F_2 &= \{\{5,2\}, \{4,3\}, \{1,6\}\} \\ F_3 &= \{\{2,1\}, \{5,3\}, \{4,6\}\} \\ F_4 &= \{\{3,1\}, \{5,4\}, \{2,6\}\} \\ F_5 &= \{\{4,1\}, \{3,2\}, \{5,6\}\} \end{aligned}$$

Obrázek 28: Faktorizace K_6 dle $L_5 \approx L_+$ řádu 5

Dle kanonické faktorizace (Definice 4.1.1) $F'_i = \{\{2n, i\}\} \cup \{\{i+k, i-k\}; k = 1, 2, ..., n-1, i = 1, ..., 2n-1\}$, kde čísla $i + k$ a $i - k$ jsou vyjádřena jedním z čísel $1, 2, ..., 2n - 1 \pmod{2n-1}$, dostaneme pro K_6 faktory:

$$\begin{aligned} F'_1 &= \{\{1,6\}, \{5,2\}, \{4,3\}\} \\ F'_2 &= \{\{2,6\}, \{1,3\}, \{5,4\}\} \\ F'_3 &= \{\{3,6\}, \{4,2\}, \{1,5\}\} \\ F'_4 &= \{\{4,6\}, \{1,2\}, \{5,3\}\} \\ F'_5 &= \{\{5,6\}, \{2,3\}, \{1,4\}\}. \end{aligned}$$

Faktory jsou stejné, až na index faktoru, jako u faktorizace podle latinského čtverce L_+. Nadefinujeme-li zobrazení φ z množiny faktorů dle L_+ do množiny faktorů dle kanonické faktorizace takto:

$$\begin{aligned} F_1 &\rightarrow F_3' \\ F_2 &\rightarrow F_1' \\ F_3 &\rightarrow F_4' \\ F_4 &\rightarrow F_2' \\ F_5 &\rightarrow F_5', \end{aligned}$$

je vidět, že faktorizace dle L_+ a kanonická faktorizace jsou izomorfní.

Zobrazení φ odpovídá permutaci indexů faktorů, resp. symbolů čtverce L_+

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

která převede L_+ na idempotentní latinský čtverec. Rozklad K_5 sestrojený dle idempotentního latinského čtverce izomorfního s L_+ je tedy úplně stejný jako kanonický rozklad. Tento postup můžeme zobecnit, což je obsahem následujícího tvrzení.

Tvrzení 5.6.1 *Kanonická 1-faktorizace K_{2n} je ekvivalentní 1-faktorizaci K_{2n}, sestrojené dle idempotentního latinského čtverce izomorfního s L_+.*

Důkaz:

Korektní důkaz tohoto tvrzení zde uvádět nebudeme, jelikož je technicky náročný nad rámec této bakalářské práce. Podobné obecnější tvrzení bylo dokázáno s využitím teorie grup v článku [13].

6 Rozpisy střelecké soutěže

Cílem je sestavit rozpis střelecké soutěže, který by co nejvíce odpovídal harmonickému losování.

Definice 6.1 *Losování, které splňuje následující požadavky, nazýváme losování harmonické.*

1. Losování je kompaktní. (Každého kola se účastní všichni hráči, pro lichý počet hráčů se účastní všichni až na jednoho.)
2. Losování má nejmenší možný počet brejků. (Každý hráč střídá co nejlépe pozice vlevo a vpravo.)
3. Je zajištěno pravidelné střídání hráčů na střelnicích. (Každý hráč během turnaje prostřídá všechny střelnice, přičemž na každé střelnici odehraje stejný počet zápasů.)
4. Jsou zajištěny rovnoměrné pauzy pro všechny hráče.

Jak už bylo řečeno v kapitole 5, latinské čtverce můžeme využít k sestavování rozpisů sportovních soutěží. V našem případě se jedná o soutěž ve střelbě. Vytváření rozpisu ukážeme na příkladech a rozpisy zhodnotíme vzhledem k požadavkům harmonického losování.

Základní výpočty a značení

Označíme:

N -	počet přihlášených hráčů,
k -	počet zápasů kola,
Z -	celkový počet zápasů,
m -	počet kol turnaje,
s -	počet střelnic, které jsou k dispozici.

Pro sudý počet přihlášených hráčů $N = 2n$ bude celkový počet zápasů $Z = \binom{2n}{2} = \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} = n \cdot (2n-1)$. Počet zápasů jednoho kola bude $k = n$ a počet kol $m = 2n - 1$.

Pro lichý počet přihlášených hráčů $N = 2n - 1$ bude celkový počet zápasů $Z = \binom{2n-1}{2} = \frac{2n-1 \cdot (2n-2)}{2} = (2n-1) \cdot (n-1)$. Počet zápasů jednoho kola bude $k = n - 1$ a počet kol $m = 2n - 1$.

Rozpis turnaje pro 7 hráčů:

Způsob vytvoření rozpisu si nejprve ukážeme na příkladu pro malý počet přihlášených hráčů. Pro počet hráčů $N = 2n - 1 = 7$ si nejdříve vyjádříme počet zápasů jednoho kola $k = n - 1 = 4 - 1 = 3$. Dále vypočítáme celkový počet zápasů $Z = \binom{2n-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$, přičemž počet kol turnaje je $m = \frac{Z}{k} = \frac{21}{3} = 7$ kol. Je zřejmé, že bude nejvhodnější využít právě 3 střelnice, jelikož v každém kole proběhnou právě 3 zápasy.

Při sestavení rozpisu vyjdeme z latinského čtverce L_+ řádu 7, viz obrázek 29, ke kterému najdeme vhodnou permutací symbolů izomorfní idempotentní čtverec.

Předpis permutace :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

+	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

$\rightarrow$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	2	6	3	7	4
2	5	2	6	3	7	4	1
3	2	6	3	7	4	1	5
4	6	3	7	4	1	5	2
5	3	7	4	1	5	2	6
6	7	4	1	5	2	6	3
7	4	1	5	2	6	3	7

Obrázek 29: Latinský čtverec L_+ pro 7 hráčů a k němu izomorfní idempotentní čtverec

Každý symbol $L_+(i,j) = i + j \pmod n$ latinského čtverce představuje kolo turnaje, ve kterém se hráči i a j utkají. Jelikož se ve čtverci každý symbol vyskytuje vícekrát, je zřejmé, že se bude v každém kole odehrávat více zápasů. Např. symbol 2 se v latinském čtverci na obrázku 29 vyskytuje právě 7×. Podíváme-li se ale na jednotlivé pozice symbolů, zjistíme, že se některé dvojice hráčů opakují. Latinský čtverec L_+ je symetrický, tzn. informace k vytvoření rozpisu je jen v půlce tohoto čtverce. Symetrie plyne z vlastnosti komutativity operace + modulo n. My si k vytvoření rozpisu turnaje vybereme část čtverce pod hlavní diagonálou. Symbol na hlavní diagonále $L_+(i,j)$ představuje kolo, ve kterém hráč i odpočívá. Žádný hráč totiž nemůže hrát sám se sebou.

Protože rozpis vytvořený podle idempotentního latinského čtverce je ekvivalentní kanonickému losování, můžeme sestrojit související tabulku HAP (obrázek 30), kde levá a pravá strana střelnice odpovídá pojmům "Away" a "Home". Řádky tabulky HAP odpovídají jednotlivým kolům turnaje a sloupce představují hráče.

V tabulce na obrázku 31 je znázorněn rozpis turnaje pro 7 hráčů vytvořený podle idempotentního latinského čtverce L, izomorfního s L_+. Řádky tabulky představují kola a ve sloupcích jsou rozepsány zápasy daného kola. Např. chceme-li najít všechny zápasy 1. kola, pak v idempotentním latinském čtverci na obrázku 29 vybereme buňky obsahující symbol 1. Pozice těchto buněk nám dají dvojice hráčů, resp. zápasy tohoto kola. Jak již bylo zmíněno, buňky vybíráme z části latinského čtverce pod hlavní diagonálou. V rozpisu je zohledněno střídání levých a pravých stran, např. v 2. kole hrají 3. zápas hráči 5 a 6,

kolo, hráč	1	2	3	4	5	6	7
1	-	L	P	L	P	L	P
2	P	-	L	P	L	P	L
3	L	P	-	L	P	L	P
4	P	L	P	-	L	P	L
5	L	P	L	P	-	L	P
6	P	L	P	L	P	-	L
7	L	P	L	P	L	P	-

Obrázek 30: Tabulka HAP pro 7 hráčů

přičemž hráč 5 hraje vlevo a hráč 6 vpravo. Protože jsme použili idempotentní čtverec, je zajištěno, že v 1. kole odpočívá hráč č. 1, ve 2. kole hráč č. 2 atd.

kolo	1.zápas	2.zápas	3.zápas
1.	27	63	45
2.	31	74	56
3.	15	42	67
4.	71	26	53
5.	12	37	64
6.	41	23	75
7.	16	52	34

Obrázek 31: Rozpis hráčů s ohledem na střídání stran střelnice

Lemma 6.2 *Pro N liché existuje kompaktní losování s dokonalým střídáním střelců na pozicích vlevo a vpravo.*
Důkaz: Kompaktní rozpis je sestaven dle idempotentního latinského čtverce řádu N izomorfního s L_+, viz Lemma 5.5.2, Tvrzení 5.6.1 a dokonalé střídání pozic vlevo a vpravo plyne z existence HAP bez brejků, viz Věta 4.2.1.

Rozpis turnaje pro 8 hráčů

Pro počet hráčů $N = 2n = 8$ vyjádříme celkový počet zápasů $Z = \binom{2n}{2} = \binom{8}{2} = 28$, počet zápasů jednoho kola je $k = n = 4$ a počet kol turnaje je $m = \frac{Z}{k} = \frac{28}{4} = 7$.

Rozpis tvoříme stejným způsobem jako rozpis pro 7 hráčů, avšak hráče, který v daném kole odpočívá připojíme do dvojice s hráčem č. 8. Tak zaručíme, že hráč č. 8 bude hrát v každém kole a prostřídá se se všemi ostatními hráči. Tento rozpis je ekvivalentní rozpisu dle kanonického rozkladu K_8. Na obrázku 32 vidíme rozpis zápasů pro 8 hráčů dle idempotentního latinského čtverce (viz obrázek 30) a tabulku umístění HAP, kde jsme docílili nejmenšího možného počtu brejků $2n - 2 = 8 - 2 = 6$. Rozpis zápasů je již vytvořen s ohledem na střídání hráčů na levé a pravé straně střelnice.

hráč,kolo	1	2	3	4	5	6	7
1	L	P	L	P	L	P	L
2	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P
3	P	L	$\underline{L}$	P	L	P	L
4	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P
5	P	L	P	L	$\underline{L}$	P	L
6	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$
7	P	L	P	L	P	L	$\underline{L}$
8	P	L	P	L	P	L	P

kolo,zápas	1.	2.	3.	4.
1.	18	27	63	45
2.	82	31	74	56
3.	38	42	15	67
4.	84	53	26	71
5.	58	64	37	12
6.	86	75	41	23
7.	78	16	52	34

Obrázek 32: Tabulka HAP a rozpis pro 8 hráčů

Lemma 6.3 *Pro N sudé, tj. $N = 2n$, lze sestavit kompaktní rozpis s nejlepším možným střídáním hráčů na pozicích vlevo a vpravo.*
Důkaz: Kompaktní rozpis je sestaven dle kanonického rozkladu, nebo ekvivalentně dle idempotentního latinského čtverce. Střídání pozic je zajištěno existencí tabulky HAP s nejmenším možným počtem brejků $2n-2$, dle Věty 4.1.2.

Při sestavování rozpisu turnaje pro sudé počty hráčů $N = 2n$ lze tedy vycházet z kanonického rozkladu pro K_{2n} a ekvivalentně z idempotentního latinského čtverce L_{2n-1}. Jak ale vidíme na předchozím příkladu pro 8 hráčů, pomocí těchto nástrojů jsme schopni vytvořit pouze rozpis turnaje, ve kterém se hráči pravidelně prostřídají na levé a pravé straně střelnice. Také je zřejmé, že rozpis je kompaktní, protože v každém kole turnaje budou hrát všichni hráči. Rozpis turnaje, který by zaručoval spravedlivé střídání na střelnicích pro sudý počet hráčů, takto vytvořit neumíme.

Dále budeme pokračovat v příkladu pro 7 hráčů a pokusíme se v rozpisu zohlednit střídání hráčů na střelnicích.

Turnaj probíhá vždy na určitém počtu střelnic. V tomto případě bude vhodné využít 3 střelnice, protože v každém kole máme 3 zápasy. Abychom zajistili spravedlivé střídání hráčů na střelnicích, využijeme k tomu transverzály idempotentního latinského čtverce. Každá transverzála, s vyjímkou hlavní diagonály čtverce, představuje jednu střelnici. Transverzála vybere z každého řádku a sloupce latinského čtverce právě jednu buňku, tj. celkem 7 buněk se sedmi různými symboly. Tomu odpovídá 7 zápasů v každém kole jeden a nemůže se stát, že bychom určili v jednom kole 2 zápasy na stejnou střelnici. Jestliže potřebujeme právě 3 střelnice, postačí nám najít v latinském čtverci právě 3 disjunktní transverzály, ty jsou vyznačeny na obrázku 33.

Rozpis turnaje na jednotlivých střelnicích tvoříme tak, že si vybereme jednu z vyznačených transverzál a pomocí ní sestavíme rozpis zápasů na dané střelnici. Na každé střelnici bude počet zápasů odpovídat počtu kol turnaje, tj. v tomto případě 7 zápasů, viz tabulka na obrázku 34. Z této tabulky je dále zřejmé, že se všichni hráči spravedlivě prostřídají. Každý hráč během turnaje odehraje právě 6 zápasů, přičemž transverzály nám zaručí, že každý hráč bude hrát právě 2× na každé střelnici. Navíc zůstává zajištěn předpoklad střídání

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	2	6	3	7	4
2	5	2	6	3	7	4	1
3	2	6	3	7	4	1	5
4	6	3	7	4	1	5	2
5	3	7	4	1	5	2	6
6	7	4	1	5	2	6	3
7	4	1	5	2	6	3	7

Obrázek 33: Tři transverzály idempotentního latinského čtverce řádu 7

levých a pravých stran střelnice a maximálně se prostřídají všechny dvojice hráčů.

kolo	1.střelnice	2.střelnice	3.střelnice
1.	27	45	63
2.	31	56	74
3.	42	67	15
4.	53	71	26
5.	64	12	37
6.	75	23	41
7.	16	34	52

Obrázek 34: Rozpis na střelnicích pro 7 hráčů

Pro 7 hráčů počet střelnic přesně odpovídá počtu zápasů jednoho kola, a proto se každého kola účastní všichni hráči, a tedy nejsou žádné pauzy mezi zápasy, kromě jedné pauzy za turnaj pro každého hráče během kola, kdy hráč odpočívá. Pro 7 hráčů jsme takto sestavili rozpis, který zcela odpovídá požadavkům harmonického losování.

Tvrzení 6.4 *Pro n lichá taková, že počet zápasů kola $k = n - 1$ je stejný jako počet střelnic $k = s$, existuje harmonické losování turnaje.*
Důkaz: Z Lemma 6.2 plyne, že jsme schopni zajistit požadavky 1, 2 a 4 harmonického losování. Z Věty 5.4.3 plyne existence dostatečného počtu transverzál, které určují rozdělení zápasů na střelnice.

Nyní se pokusíme použít stejný přístup rozdělení zápasů na střelnice pro 8 hráčů. V každém kole se odehrají 4 zápasy, proto využijeme právě 4 střelnice. Rozdělení zápasů na střelnice můžeme sestavit dle tří transverzál z obrázku 33, k nimž přidáme diagonálu, která je čtvrtou transverzálou. Avšak 8. hráč by všechny své zápasy odehrál na 4. střelnici, a proto je třeba najít jiný způsob rozdělení zápasů na střelnice. Transverzály můžeme uvedeným způsobem využít jen pro N liché.

Zcela harmonický rozpis však umíme vytvořit pouze pro 5, 7 a 9 hráčů, jelikož zde počet zápasů jednoho kola přesně odpovídá danému počtu střelnic 2, 3 a 4, které jsou v reálné soutěži k dispozici. Pro větší počty zápasů jednoho kola je však nutné vystačit stále s omezeným počtem střelnic. Proto uvedeme i příklad pro 13 hráčů.

Rozpis turnaje pro 13 hráčů:

U tohoto příkladu již počet zápasů jednoho kola přesně neodpovídá počtu střelnic. Počet zápasů kola je však dělitelný počtem střelnic, což nám umožní téměř vyhovět požadavkům harmonického losování. Postup je obdobný jako u rozpisu pro 7 hráčů. Pro počet hráčů $N = 2n - 1 = 13$ si nejdříve vyjádříme počet zápasů jednoho kola $k = n - 1 = 7 - 1 = 6$, pak vypočítáme celkový počet zápasů $Z = \binom{2n-1}{2} = \binom{13}{2} = 78$, přičemž počet kol turnaje je $m = \frac{Z}{k} = \frac{78}{6} = 13$. Je zřejmé, že bude nejvhodnější využít právě 3 střelnice, jelikož počet zápasů jednoho kola je dělitelný třemi. Na každé střelnici se v každém kole budou odehrávat dva zápasy.
Nejprve si vytvoříme latinský čtverec L_+ pro 13 hráčů, pomocí operace sčítání modulo 13, který vidíme na obrázku 35.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Obrázek 35: Latinský čtverec L_+ pro 13 hráčů

Abychom mohli připojit tabulku HAP pro střídání L,P, zvolíme vhodnou permutaci symbolů hlavní diagonály latinského čtverce L_+ tak, abychom získali idempotentní latinský čtverec.
Předpis permutace :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

Na obrázku 36 je idempotentní izomorfní latinský čtverec s L_+ řádu 13 a na obrázku 37 je tabulka HAP. Docílíme tak ideálního rozpisu z hlediska střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo a odpočívání hráčů v daném kole. Takto vytvořený rozpis je ekvivalentní s kanonickým losováním.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7
2	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1
3	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8
4	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2
5	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9
6	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3
7	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10
8	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4
9	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11
10	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5
11	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12
12	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13

Obrázek 36: Idempotentní latinský čtverec pro 13 hráčů

kolo, hráč	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	-	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P
2	P	-	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L
3	L	P	-	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P
4	P	L	P	-	L	P	L	P	L	P	L	P	L
5	L	P	L	P	-	L	P	L	P	L	P	L	P
6	P	L	P	L	P	-	L	P	L	P	L	P	L
7	L	P	L	P	L	P	-	L	P	L	P	L	P
8	P	L	P	L	P	L	P	-	L	P	L	P	L
9	L	P	L	P	L	P	L	P	-	L	P	L	P
10	P	L	P	L	P	L	P	L	P	-	L	P	L
11	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	-	L	P
12	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	-	L
13	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	-

Obrázek 37: Tabulka HAP pro 13 hráčů

Dále potřebujeme zajistit pravidelné střídání hráčů na střelnicích. K tomu využijeme transverzály idempotentního latinského čtverce, o kterém víme, že má N disjunktních transverzál. V tomto konkrétním případě je v každém kole právě 6 zápasů a proto vybereme v latinském čtverci na obrázku 38 právě 6 transverzál. Z předchozího příkladu víme, že transverzály představují střelnice a v tomto případě bychom potřebovali 6 střelnic. K dispozici máme ovšem pouze 2, 3 nebo 4 střelnice. Protože počet zápasů kola je dělitelný třemi, použijeme rozpis na 3 střelnicích s tím, že v každém kole se na každé střelnici odehrají právě 2 zápasy, jak můžeme vidět na obrázku 39. Každé kolo rozdělíme libovolně na 2 půlkola.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7
2	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1
3	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8
4	9	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2
5	3	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9
6	10	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3
7	4	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10
8	11	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4
9	5	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11
10	12	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5
11	6	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12
12	13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
13	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6	13

Obrázek 38: Šest transverzál idempotentního latinského čtverce řádu 13

kolo	1.střelnice	2.střelnice	3.střelnice	odpočívá
1.	8 7	2 13	6 9	1
	4 11	10 5	12 3	1
2.	9 8	3 1	7 10	2
	5 12	11 6	13 4	2
3.	10 9	4 2	8 11	3
	6 13	12 7	1 5	3
4.	11 10	5 3	9 12	4
	7 1	13 8	2 6	4
5.	12 11	6 4	10 13	5
	8 2	1 9	3 7	5
6.	13 12	7 5	11 1	6
	9 3	2 10	4 8	6
7.	1 13	8 6	12 2	7
	10 4	3 11	5 9	7
8.	2 1	9 7	13 3	8
	11 5	4 12	6 10	8
9.	3 2	10 8	1 4	9
	12 6	5 13	7 11	9
10.	4 3	11 9	2 5	10
	13 7	6 1	8 12	10
11.	5 4	12 10	3 6	11
	1 8	7 2	9 13	11
12.	6 5	13 11	4 7	12
	2 9	8 3	10 1	12
13.	7 6	1 12	5 8	13
	3 10	9 4	11 2	13

Obrázek 39: Rozpis turnaje na jednotlivých střelnicích pro 13 hráčů

Z tabulky rozpisu turnaje na obrázku 39 je patrné, že je zajištěno jak pravidelné střídání hráčů na střelnicích, tak i pravidelné střídání hráčů na levé a pravé straně střelnice. Každý hráč hraje na každé střelnici právě čtyřikrát, z toho dvakrát na levé straně a dvakrát na pravé straně střelnice. Také je stále zachováno přibližně rovnoměrné střídání hráčů během zápasu. Každého kola se účastní všichni hráči (kromě hráče, který odpočívá), a proto se nemůže stát, že by některý z hráčů odehrál všechny zápasy v začátku turnaje, nebo jen na konci. Hráči mají mezi zápasy přibližně rovnoměrné pauzy. Nejkratší pauza je žádná pauza, průměrně však mají hráči pauzu jedno až dvě půlkola (jeden až dva zápasy). Nejdelší pauza vzniká ve chvíli, kdy hráč v daném kole odpočívá, a proto může být až 4 půlkola dlouhá (v tomto případě 4 zápasy). Vzhledem k celkovému počtu 26 půlkol bychom mohli toto rozdělení pauz mezi zápasy pro hráče považovat za dostatečně rovnoměrné a spravedlivé.

Z reálného problému pořádání střelecké soutěže vychází omezení na počet střelnic, které jsou k dispozici. Vycházíme-li z této reálné úlohy, počty střelnic, které můžeme obsadit jsou 2,3 nebo 4. Vzhledem k požadavkům harmonického losování soutěže je vhodné volit počet obsazených střelnic v závislosti na počtu přihlášených hráčů a počtu zápasů připadajících na jedno kolo turnaje. Náš návrh rozpisu se nejvíce blíží rozpisu harmonickému v případě, že počet zápasů kola je dělitelný počtem střelnic, které mohou být obsazeny. Problém umíme lépe řešit pro liché počty přihlášených hráčů, tedy pro $N = 2n - 1$ hráčů. Pak na 1 kolo připadá $n - 1$ zápasů.

V následující větě shrneme pro které hodnoty N počtu přihlášených hráčů a pro které hodnoty s počtu střelnic, které jsou k dispozici, můžeme sestavit rozpis blízký harmonickému losování. Sestavení rozpisu je založeno na využití transverzál idempotentního latinského čtverce izomorfního s L_+ podobně jako v příkladu pro $N = 13$ hráčů.

Věta 6.5 *Pro počet hráčů* ($N \equiv 1 \pmod 4$, $N \equiv 1 \pmod 6$, $N \equiv 1 \pmod 8$) *a počet střelnic* ($s = 2, s = 3, s = 4$) *lze sestavit rozpis turnaje, který splňuje podmínky* $1, 2, 3$ *harmonického losování dokonale a blíží se i splnění podmínky* 4.

Důkaz: Splnění podmínek 1, 2 harmonického losování vyplývá z Lemma 6.2.

pro $N \equiv 1 \pmod 4$ **a** $s = 2$

Je-li počet zápasů kola dělitelný dvěma $k = 2p$, kde $p \in \mathbb{N}$, pak pro počet hráčů musí platit $N = 2k + 1 = 2 \cdot 2p + 1 = 4p + 1$ tj. $N \equiv 1 \pmod 4$ a můžeme zvolit rozpis turnaje na 2 střelnice. Dle Věty 5.4.3 v idempotentním latinském čtverci řádu N izomorfním s L_+ najdeme $2p$ transverzál, které zaručí pravidelné střídání hráčů na 2 střelnicích, přičemž každý hráč střílí na každé střelnici $2p$ -krát s nejdelší pauzou $\frac{3}{2}k - 2$ a ostatními pauzami v rozmezí 0 až $(k-2)$. Počty hráčů N, pro které bude vhodné zvolit 2 střelnice jsou např.: $N \in \{5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...\}$.

pro $N \equiv 1 \pmod 6$ **a** $s = 3$

Je-li počet zápasů kola dělitelný třemi $k = 3p$, kde $p \in \mathbb{N}$, pak pro počet hráčů musí platit $N = 2k + 1 = 2 \cdot 3p + 1 = 6p + 1$ tj. $N \equiv 1 \pmod 6$ a můžeme zvolit rozpis turnaje na 3 střelnice. Dle Věty 5.4.3 v idempotentním latinském čtverci řádu N izomorfním s L_+ najdeme $3p$ transverzál, které zaručí pravidelné střídání hráčů na 3 střelnicích, přičemž každý hráč střílí na každé střelnici $3p$ -krát s nejdelší pauzou $k - 2$ a ostatními pauzami v rozmezí 0 až $(\frac{2}{3}k-2)$. Počty hráčů N, pro které bude vhodné zvolit 3 střelnice jsou např.: $N \in \{7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, ...\}$.

pro $N \equiv 1 \pmod 8$ **a** $s = 4$

Je-li počet zápasů kola dělitelný čtyřmi $k = 4p$, kde $p \in \mathbb{N}$, pak pro počet hráčů musí platit $N = 2k + 1 = 2 \cdot 4p + 1 = 8p + 1$ tj. $N \equiv 1 \pmod 8$ a můžeme zvolit rozpis turnaje na 4 střelnice. Dle Věty 5.4.3 v idempotentním latinském čtverci řádu N izomorfním s L_+ najdeme $4p$ transverzál, které zaručí pravidelné střídání hráčů na 4 střelnicích, přičemž každý hráč střílí na každé střelnici $4p$ -krát s nejdelší pauzou $\frac{3}{4}k - 2$ a ostatními pauzami v rozmezí 0 až $(\frac{k}{2} - 2)$. Počty hráčů N, pro které bude vhodné zvolit 4 střelnice jsou např.:

$N \in \{9, 17, 25, 33, 41, ...\}$.

Poznámka 6.6 Pro některé počty hráčů N si můžeme vybírat, jaký počet střelnic nám bude vyhovovat a stále můžeme sestavit rozpis blízký požadavkům harmonického rozpisu. Např. pro $N = 25$ můžeme zvolit 2, 3 i 4 střelnice. Naopak pro počty hráčů $N = \{11, 15, 23, 27, 35, ...\}$ počet zápasů není soudělný s 2, 3 ani 4. Rozpis pro tato N sestavit samozřejmě lze, ale z některých požadavků harmonického rozpisu musíme upustit.

V tabulce na obrázku 40 máme rozepsaný počet účastníků N turnaje a počet zápasů k v každém kole. Ve spodní části tabulky vidíme zbytky po dělení čísly 3 a 4, jelikož zde uvažujeme 3 nebo 4 střelnice. Je zřejmé, že zbytky po dělení se opakují, a můžeme proto předpokládat, že např. pro dvojici $N = 11$ a $N = 23$ bude rozpis turnaje vytvořen obdobně. Taktéž například dvojice $N = 15$ a $N = 23$ bude mít obdobný rozpis turnaje na 4 střelnicích.

n	11	15	23	27	35
k	5	7	11	13	17
3 střelnice	2	1	2	1	2
4 střelnice	1	3	3	1	1

Obrázek 40: Tabulka se zbytky po dělení počtu zápasů kola počtem střelnic

Pro tyto speciální případy můžeme rozpis turnaje přizpůsobit danému počtu hráčů, i když zřejmě nebudou vždy splněny všechny požadavky turnaje. Na příkladu pro 11 hráčů si ukážeme dva možné přístupy, jak lze vytvořit rozpis turnaje, jestliže počet zápasů kola není dělitelný počtem střelnic, které jsou k dispozici. U prvního přístupu se snažíme udělat rozpis turnaje tak, aby bylo co nejméně porušeno střídání hráčů na střelnicích. U druhého způsobu se více zaměříme na maximální využití jednotlivých střelnic, tzn. abychom co nejméně narušili kompaktnost turnaje.

Rozpis turnaje pro 11 hráčů:

Pro počet hráčů $N = 2n - 1 = 11$ vyjádříme počet zápasů jednoho kola $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$, celkový počet zápasů $Z = \binom{2n-1}{2} = \binom{11}{2} = 55$, přičemž celkový počet kol turnaje je $m = \frac{Z}{k} = \frac{55}{5} = 11$ kol.
Nejprve si vytvoříme latinský čtverec L_+ pro 11 hráčů, viz obrázek 41. Nyní si zvolíme vhodnou permutaci symbolů hlavní diagonály latinského čtverce a následně vytvoříme idempotentní latinský čtverec pro 11 hráčů (obrázek 43). K idempotentnímu latinskému čtverci pro 11 hráčů připojíme tabulku HAP (obrázek 42). V idempotentním latinském čtverci si vyznačíme 5 transverzál, jelikož v 1 kole turnaje bude právě 5 zápasů.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Obrázek 41: Latinský čtverec L_+ pro 11 hráčů

kolo, hráč	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P
2	P	-	L	P	L	P	L	P	L	P	L
3	L	P	-	L	P	L	P	L	P	L	P
4	P	L	P	-	L	P	L	P	L	P	L
5	L	P	L	P	-	L	P	L	P	L	P
6	P	L	P	L	P	-	L	P	L	P	L
7	L	P	L	P	L	P	-	L	P	L	P
8	P	L	P	L	P	L	P	-	L	P	L
9	L	P	L	P	L	P	L	P	-	L	P
10	P	L	P	L	P	L	P	L	P	-	L
11	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	-

Obrázek 42: Tabulka HAP pro 11 hráčů

Předpis permutace:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Nyní přistoupíme k 1. způsobu, jak lze vytvořit rozpis turnaje pro 11 hráčů. V tomto rozpisu se snažíme co jak nejvíce zachovat střídání hráčů na střelnicích i na stranách střelnic. Tento rozpis je znázorněn na obrázku 44.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	7	2	8	3	9	4	10	5	11	6
2	7	2	8	3	9	4	10	5	11	6	1
3	2	8	3	9	4	10	5	11	6	1	7
4	8	3	9	4	10	5	11	6	1	7	2
5	3	9	4	10	5	11	6	1	7	2	8
6	9	4	10	5	11	6	1	7	2	8	3
7	4	10	5	11	6	1	7	2	8	3	9
8	10	5	11	6	1	7	2	8	3	9	4
9	5	11	6	1	7	2	8	3	9	4	10
10	11	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
11	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5	11

Obrázek 43: Idempotentní latinský čtverec pro 11 hráčů

V tabulce na obrázku 44 vidíme, že i pro 11 hráčů lze sestavit téměř harmonický rozpis turnaje. Na 1. a 2. střelnici v každém kole probíhají dva zápasy. Na 3. střelnici se však v každém kole odehrává pouze jeden zápas. Přesto je zajištěno pravidelné střídání hráčů na pravé a levé straně střelnice a navíc každý hráč hraje čtyřikrát na první a druhé střelnici a 2× na třetí střelnici. Můžeme tedy říci, že u tohoto způsobu vytvoření rozpisu se nám podařilo zachovat pravidelné střídání hráčů, i když je jedna střelnice využita méně než ostatní. Nevyhověli jsme tedy zcela požadavkům kompaktního rozlosování turnaje.

kolo	1.střelnice	2.střelnice	3.střelnice
1.	2 11 8 5	10 3 6 7	4 9
2.	3 1 9 6	11 4 7 8	5 10
3.	4 2 10 7	1 5 8 9	6 11
4.	5 3 11 8	2 6 9 10	7 1
5.	6 4 1 9	3 7 10 11	8 2
6.	7 5 2 10	4 8 11 1	9 3
7.	8 6 3 11	5 9 1 2	10 4
8.	9 7 4 1	6 10 2 3	11 5
9.	10 8 5 2	7 11 3 4	1 6
10.	11 9 6 3	8 1 4 5	2 7
11.	1 10 7 4	9 2 5 6	3 8

Obrázek 44: Rozpis turnaje pro 11 hráčů na 3 střelnicích

Druhý přístup, jak vytvořit rozpis pro 11 hráčů je použití 4 střelnic (obrázek 45). V každém kole se budou odehrávat pouze 4 zápasy z celkového počtu 5 zápasů. V každém kole nám zůstane 1 zápas navíc, tzn. celkem budeme mít navíc 11 zápasů. Ty můžeme rozdělit do 3 dalších kol s tím, že 3. kolo bude obsahovat pouze 3 zápasy. Sice se nám zvýší počet kol, ale oproti předchozímu způsobu jsme využili větší počet střelnic a turnaj tak bude probíhat rychleji. Bohužel se nám však nepovedlo zajistit spravedlivé střídání hráčů na střelnicích, ani spravedlivé střídání na levé a pravé straně střelnice. Každý hráč hraje na 2 střelnicích 2× a na zbylých 2 střelnicích 3×.

kolo	1.střelnice	2.střelnice	3.střelnice	4.střelnice
1.	2 11	10 3	4 9	6 7
2.	3 1	11 4	5 10	7 8
3.	4 2	1 5	6 11	8 9
4.	5 3	2 6	7 1	9 10
5.	6 4	3 7	8 2	10 11
6.	7 5	4 8	9 3	11 1
7.	8 6	5 9	10 4	1 2
8.	9 7	6 10	11 5	2 3
9.	10 8	7 11	1 6	3 4
10.	11 9	8 1	2 7	4 5
11.	1 10	9 2	3 8	5 6
12.	9 6	10 7	3 11	5 2
13.	11 8	1 9	2 10	7 4
14.	4 1	6 3	8 5	

Obrázek 45: Rozpis turnaje pro 11 hráčů na 4 střelnicích

Vidíme, že díky rozpisu, který byl vytvořen druhým způsobem, bude turnaj probíhat rychleji, avšak hráčům nebudou zajištěny rovnocenné podmínky. Navíc se může stát, že někteří hráči budou mít delší pauzy mezi zápasy, nebo naopak odehrajou více zápasů až ke konci turnaje. Oproti tomu rozpis turnaje vytvořen pomocí prvního způsobu je spravedlivý pro všechny hráče. Jeho nedostatkem je však využití pouze 2 střelnic v každém druhém půlkole a přestávky na 3. střelnici, z čehož plyne větší časová náročnost turnaje.

7 Závěr

Vycházeli jsme z reálného problému střelecké soutěže, pořádané formou turnaje, tj. během soutěže se utká každá dvojice hráčů. Cílem této práce bylo nalézt způsob, jak sestavovat rozpis zápasů této soutěže pro uvedené počty hráčů N, případně se nalezené postupy pokusit zobecnit pro některé nekonečné třídy N. Při řešení tohoto problému jsme vycházeli z metod teorie grafů a diskrétní matematiky. Ve skutečnosti se do soutěže hlásí asi $20 - 40$ účastníků. Jedno omezení pro férovost turnaje vycházelo z počtu střelnic, na kterých se turnaj odehrával. K dispozici jsme měli $2, 3$ a 4 střelnice a snažili jsme se o pravidelné střídání hráčů na těchto střelnicích. K dalším požadavkům turnaje patřilo střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo na střeleckých dráhách jedné střelnice a také to, aby měli všichni hráči pokud možno rovnoměrné pauzy mezi zápasy.

V rámci kapitoly formulace problému jsme se podrobně soustředili na všechny aspekty této střelecké soutěže a nadefinovali jsme s tím související pojmy, jimiž jsou např. turnaj a harmonický rozpis turnaje. Uvedli jsme všechny požadavky, které jsou na průběh turnaje kladeny a kterým jsme se snažili později při tvorbě rozpisu turnaje vyhovět. V kapitole 3 jsme zavedli základní pojmy teorie grafů a pojmy související s rozklady grafů na 1-faktory. Tyto pojmy a definice nám slouží k lepšímu pochopení následující kapitoly, ve které jsou uvedeny známé metody používané k tvorbě rozpisu turnaje, jako kanonické losování a home-away tabulky. Nejobtížnější bylo rozložení zápasů na střelnice, k čemuž nám metody teorie grafů nepostačovaly, a proto jsme se rozhodli k tvorbě rozpisu turnaje využít také latinské čtverce, které úzce souvisí s rozklady grafů a jsou součástí oblasti diskrétní matematiky nazývané kombinatorické designy. V rámci páté kapitoly jsme nadefinovali pojmy týkající se latinských čtverců jako transverzála, idempotentní latinský čtverec a ortogonální latinský čtverec. Také jsme dokázali několik jednoduchých tvrzení, na nichž jsou postaveny výsledky 6. kapitoly. Na základě rozkladů kompletních grafů dle latinských čtverců jsou postaveny výsledky této práce, zformulované v kapitole 6. Jsou zde uvedeny příklady tvorby rozpisů pro některé konkrétní počty hráčů a zobecněný postup tvoření rozpisu pro některé nekonečné třídy N.

Harmonického rozpisu jsme dosáhli pro počty hráčů N =5, 7 a 9, jelikož zde počet zápasů jednoho kola přesně odpovídá počtu střeleckých drah, jenž můžeme využít. Pro tyto počty hráčů se nám podařilo zajistit všechny požadavky turnaje. Pro další počty hráčů jsme byli schopni vytvořit rozpis, který je téměř harmonický. Jedná se o počty hráčů, kdy je počet zápasů jednoho kola dělitelný počtem střelnic. Nepodařilo se nám však zcela zajistit všem hráčům rovnoměrné rozložení pauz mezi zápasy.

Pro počty hráčů, kdy počet zápasů jednoho kola přesně neodpovídá počtu střelnic a ani není tímto počtem dělitelný, jsme navrhli dva přístupy, jak rozpis turnaje vytvořit. Tyto přístupy jsou ukázány na příkladu pro 11 hráčů, který je uveden v kapitole 6. U prvního způsobu jsme se snažili vyhovět co nejvíce požadavkům harmonického losování, kromě kompaktnosti, zatímco u druhého přístupu jsme se snažili, aby byl turnaj odehrán v co nejkratším čase. Rozpis turnaje podle druhého způsobu nám sice zajistil menší časovou náročnost turnaje, avšak ostatní požadavky nebyly více či méně splněny.

Největší přínos této práce spatřuji v tom, že jsme použili jak známé postupy teorie grafů při losování sportovních soutěží, tak i nástroje diskrétní matematiky, které nejsou běžně využívány k zaručení férovosti turnaje a pro především liché hodnoty počtu přihlášených hráčů N (ne všechny) se nám podařilo vyhovět téměř dokonale požadavkům harmonického losování. U sudého počtu hráčů se nám nepovedlo rozmístit zápasy na střelnice. Tento problém zůstává otevřený pro další zkoumání. Práce mi přinesla mnoho nových poznatků jak z teorie grafů, tak i z diskrétní matematiky.

8 Literatura

[1] C.C.LINDNER, C.A.RODGER, *Design Theory,* USA, CRC Press (1997), ISBN 0- 8493-3986-3.

[2] CH.J.COLBOURN, J.H.DINITZ, *The CRC handbook of combinatorial designs,* Boca Raton, CRC Press (1996), ISBN 0- 8493-8948-8.

[3] *Latinský čtverec,*
URL: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Latinský_čtverec> [cit. 2013-15-1].

[4] *Latin squares, Simple construction,*
URL: <http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/latin2.shtml> [cit. 2013-10-1].

[5] P.KOVÁŘ, *Teorie grafů,* učební text pro VŠB-TU Ostrava, (2012).

[6] P.HORÁK, *Algebra a teoretická aritmetika I,* Brno, Masarykova Univerzita (1991), ISBN 80-210-0320-0.

[7] J.HERMAN, R.KUČERA, J.ŠIMŠA, *Metody řešení matematických úloh I,* Brno, Masarykova univerzita (1996), ISBN 80-210-1202-1.

[8] D.de WERRA, *Some models of Graphs for Scheduling sports competitions,* **21** (1988), 47-65.

[9] URL: <http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=22588> [cit. 2013-20-1].

[10] D.de WERRA, *Scheduling in sports,* North-Holland, **59** (1981), 381-395.

[11] D.de WERRA, L.JACOT-DESCOMBES, P.MASSON, *A constrained sports scheduling problem,* North-Holland, Discrete Applied Mathematics, **26** (1990), 41-49.

[12] G.KENDALL, *Scheduling in sports, An annotated bibliography,*
URL:http://graham-kendall.com/publications/displaypub.php?key=kkru2010
&filename=gxk.bib [cit. 2013-14-4].

[13] D.FRONČEK, *Round robin tournaments with one bye and no breaks in home-away patterns are unique,* Multidisciplinary Scheduling : Theory and Applications (Graham Kendall, Edmund K. Burke, Sanja Petrovic, Michel Gendreau; eds.), Springer, (2005), 331-340.